

Titre : Diagrammes de Blaschke–Santaló : un outil incontournable pour l’étude des inégalités isopérimétriques.

Abstract : Une question naturelle qui revient souvent en mathématiques est de comprendre les inégalités reliant différentes quantités, voire de trouver les meilleures possibles. Les diagrammes de Blaschke–Santaló constituent un outil efficace permettant de visualiser, de manière élégante, les meilleures inégalités possibles entre différentes quantités.

À titre d’exemple, dans cet exposé, nous nous intéressons au spectre de l’opérateur de Laplace avec des conditions aux limites de Dirichlet sur $\partial\Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et plus précisément à sa première valeur propre, également appelée fréquence fondamentale $\lambda_1(\Omega)$. Malheureusement, il n’existe en général pas de formule explicite pour $\lambda_1(\Omega)$. Cela motive la recherche d’estimations via d’autres fonctionnelles, plus simples à manipuler (par exemple : le périmètre $P(\Omega)$ et le volume $|\Omega|$).

Pour mieux comprendre les inégalités reliant la première valeur propre, le périmètre et le volume, nous introduisons le diagramme de Blaschke–Santaló du triplet $(P, \lambda_1, |\cdot|)$, défini comme suit :

$$C_{F_{ad}} := \{(P(\Omega), \lambda_1(\Omega)) \mid \Omega \in F_{ad}, \text{ et } |\Omega| = 1\},$$

où F_{ad} est une classe donnée de sous-ensembles de \mathbb{R}^d . Il est important de noter que la caractérisation du diagramme équivaut à trouver toutes les inégalités possibles reliant les quantités impliquées.

Nous parvenons à décrire complètement le diagramme pour les ensembles ouverts, en montrant qu’il n’existe pas d’autres inégalités que celles de Faber–Krahn et l’inégalité isopérimétrique. Cela motive l’investigation d’autres classes d’ensembles, comme les convexes, pour lesquels nous fournissons une description avancée du diagramme correspondant. Enfin, nous discutons l’utilisation de l’outil numérique et des méthodes d’optimisation de forme pour obtenir une description optimale de ce type de diagrammes, en montrant plusieurs exemples. Cet exposé est basé sur des travaux en collaboration avec Jimmy Lamboley (Sorbonne Université, France).